

МРІ: сеточные методы

НОЦ МФТИ 2013

Введение

- Основной принцип — декомпозиция по данным
- Пример уравнения теплопроводности для одно- и двумерного случая
- Явные схемы
- Итерационных процесс
- Обмен происходит на границах областей (приграничные ячейки, ghost cells)
- Число приграничных ячеек зависит от шаблона схемы
- Структурные/неструктурные сетки

Уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad - \text{уравнение в частных производных}$$

$$u_k^{n+1} = u_k^n + c \frac{\tau}{h^2} (u_{k-1}^n - 2u_k^n + u_{k+1}^n) \quad - \text{разностная схема в одномерном случае}$$

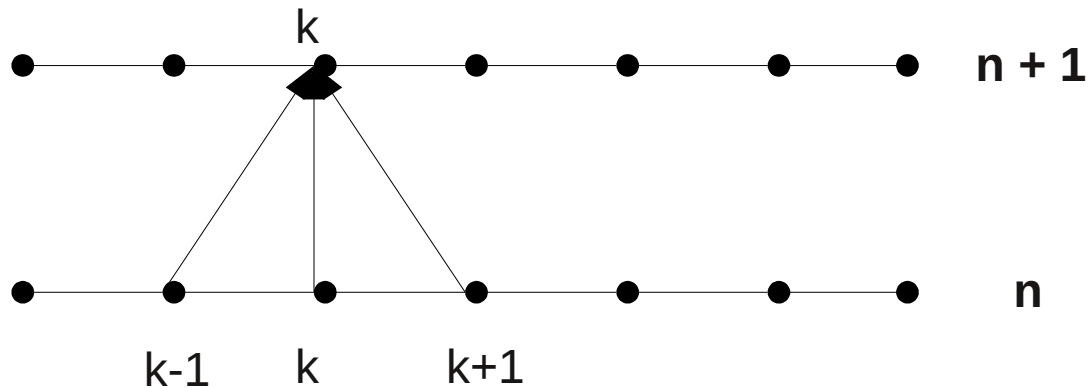
$$u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^n + c \frac{\tau}{h^2} (u_{i-1,j}^n + u_{i,j-1}^n - 4u_{i,j}^n + u_{i+1,j}^n + u_{i,j+1}^n)$$

- разностная схема в двумерном случае

τ - шаг по времени

h - шаг по координате

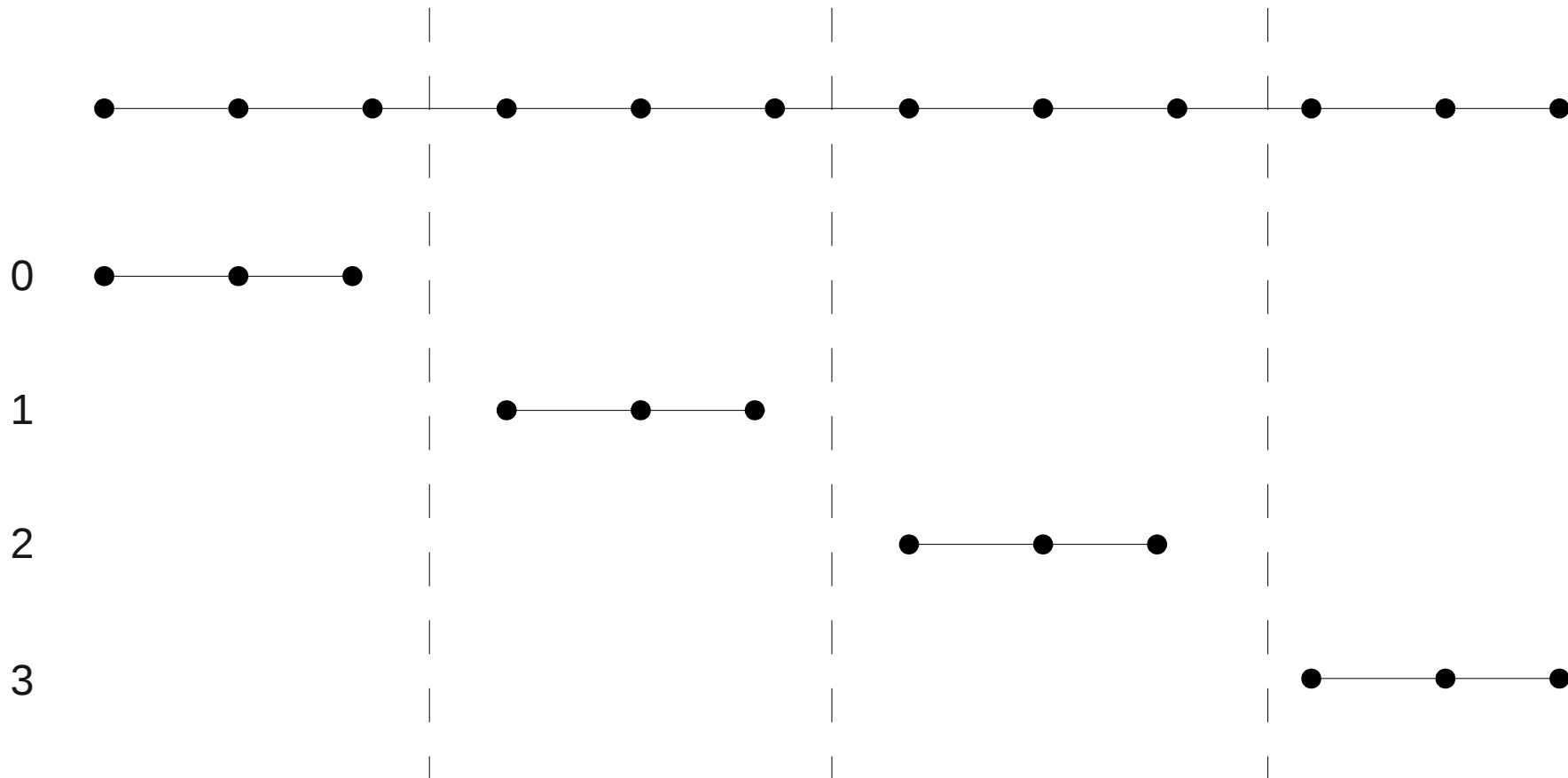
Расчетная область (1d)



- Для расчета следующего узла требуется три узла с предыдущего слоя
- Индексы узлов k , $k+1$, $k-1$
- На границах расчетной области выставлены граничные условия
- Хранится два временных слоя n и $n+1$

Декомпозиция по данным

- Разделение расчетной области между процессами на части по координате

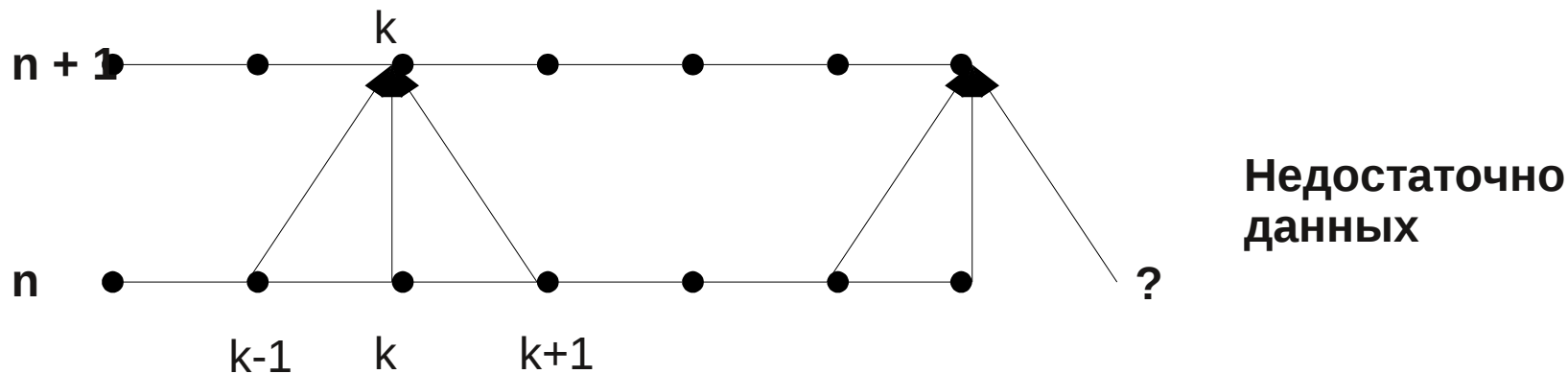


Декомпозиция по данным

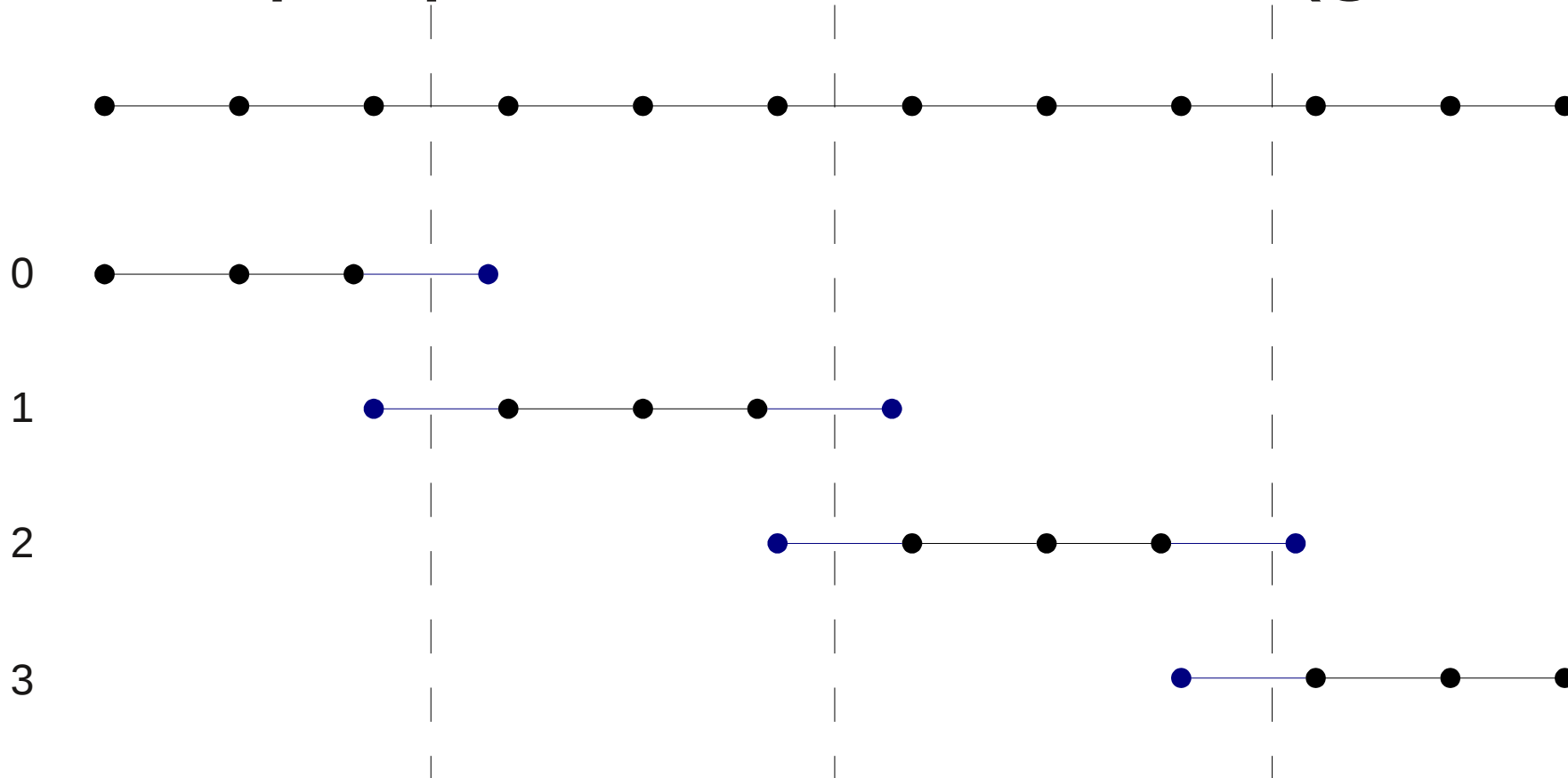
- Каждый процесс имеет свою часть расчетной области, на которой обновляет значение функций
- При расчете значений в ячейках на границах не хватает данных для перехода на следующий временной слой
- Требуются данные с соседних процессов для продолжения расчета
- Перед каждым шагом необходима парасылка

Процесс 0

- При расчете внутри области достаточно данных
- При расчете на границах не достаточно данных

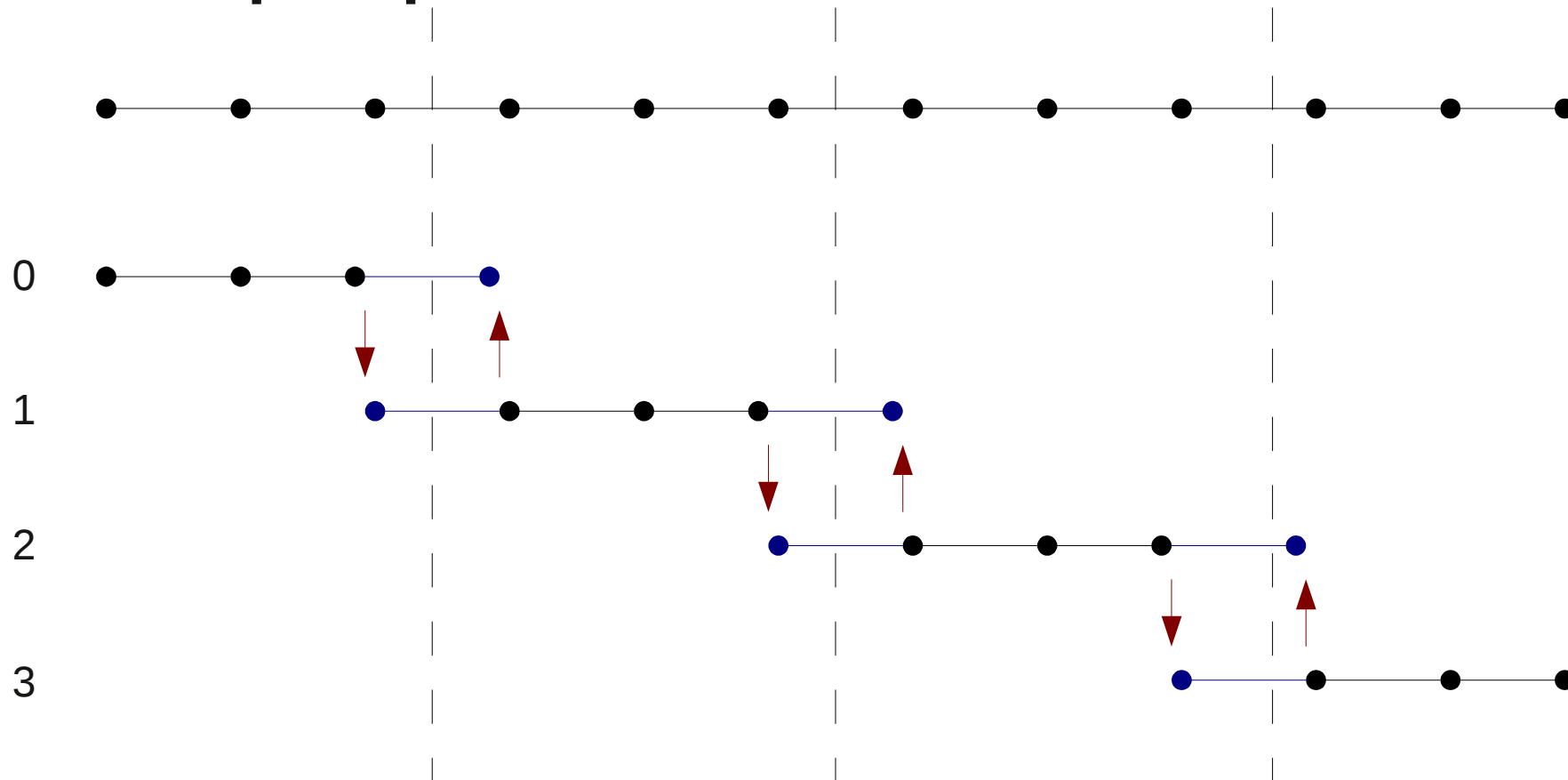


Приграничные ячейки (ghost)



Необходимо хранить несколько ячеек на границе расчетной области. Значения берутся от соседних процессов. Такие ячейки называются приграничными или ghost cells. В зависимости от шаблона разностной схемы число ячеек может меняться.

Приграничные ячейки - обмен



Для поддержания актуальных данных необходим обмен значениями с соседними процессами.

Различие последовательного и параллельного алгоритма

Последовательный

- Загрузка данных
- Начало итераций
- Обсчет нового временного слоя
- Конеч итераций
- Сохранение результата

Параллельный

- Загрузка данных
- Начало итераций
- Обсчет нового временного слоя
- **Обмен приграничными слоями**
- Конеч итераций
- **Сбор результата**
- Сохранение результата

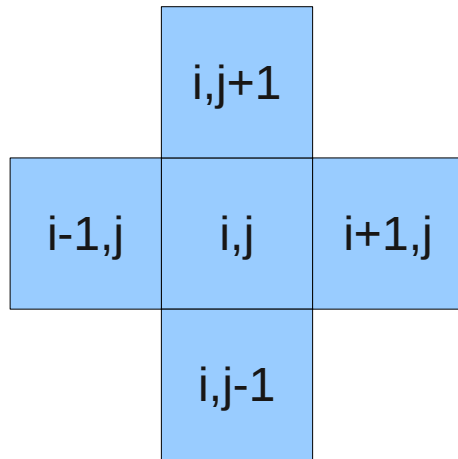
Пример пересылок

```
if (rank % 2 == 0) {
    if (rank < size - 1) {
        MPI_Send(u[u_num] + to - 1, 1, MPI_DOUBLE, rank + 1, 0, MPI_COMM_WORLD);
        MPI_Recv(u[u_num] + to, 1, MPI_DOUBLE, rank + 1, 0, MPI_COMM_WORLD,
MPI_STATUS_IGNORE);
    }
    if (rank > 0) {
        MPI_Send(u[u_num] + from, 1, MPI_DOUBLE, rank - 1, 0, MPI_COMM_WORLD);
        MPI_Recv(u[u_num] + from - 1, 1, MPI_DOUBLE, rank - 1, 0, MPI_COMM_WORLD,
MPI_STATUS_IGNORE);
    }
} else {
    if (rank > 0) {
        MPI_Recv(u[u_num] + from - 1, 1, MPI_DOUBLE, rank - 1, 0, MPI_COMM_WORLD,
MPI_STATUS_IGNORE);
        MPI_Send(u[u_num] + from, 1, MPI_DOUBLE, rank - 1, 0, MPI_COMM_WORLD);
    }
    if (rank < size - 1) {
        MPI_Recv(u[u_num] + to, 1, MPI_DOUBLE, rank + 1, 0, MPI_COMM_WORLD,
MPI_STATUS_IGNORE);
        MPI_Send(u[u_num] + to - 1, 1, MPI_DOUBLE, rank + 1, 0, MPI_COMM_WORLD);
    }
}
```

Двумерный случай

- Разделение области на домены
- Разделение может быть как по одной оси, так и по двум
- В случае деления по двум осям число пересылок уменьшается
- Оптимальный вариант по пересылкам — все области одинаковые по размеру квадраты
- Для обмена необходимы приграничные слои ячеек

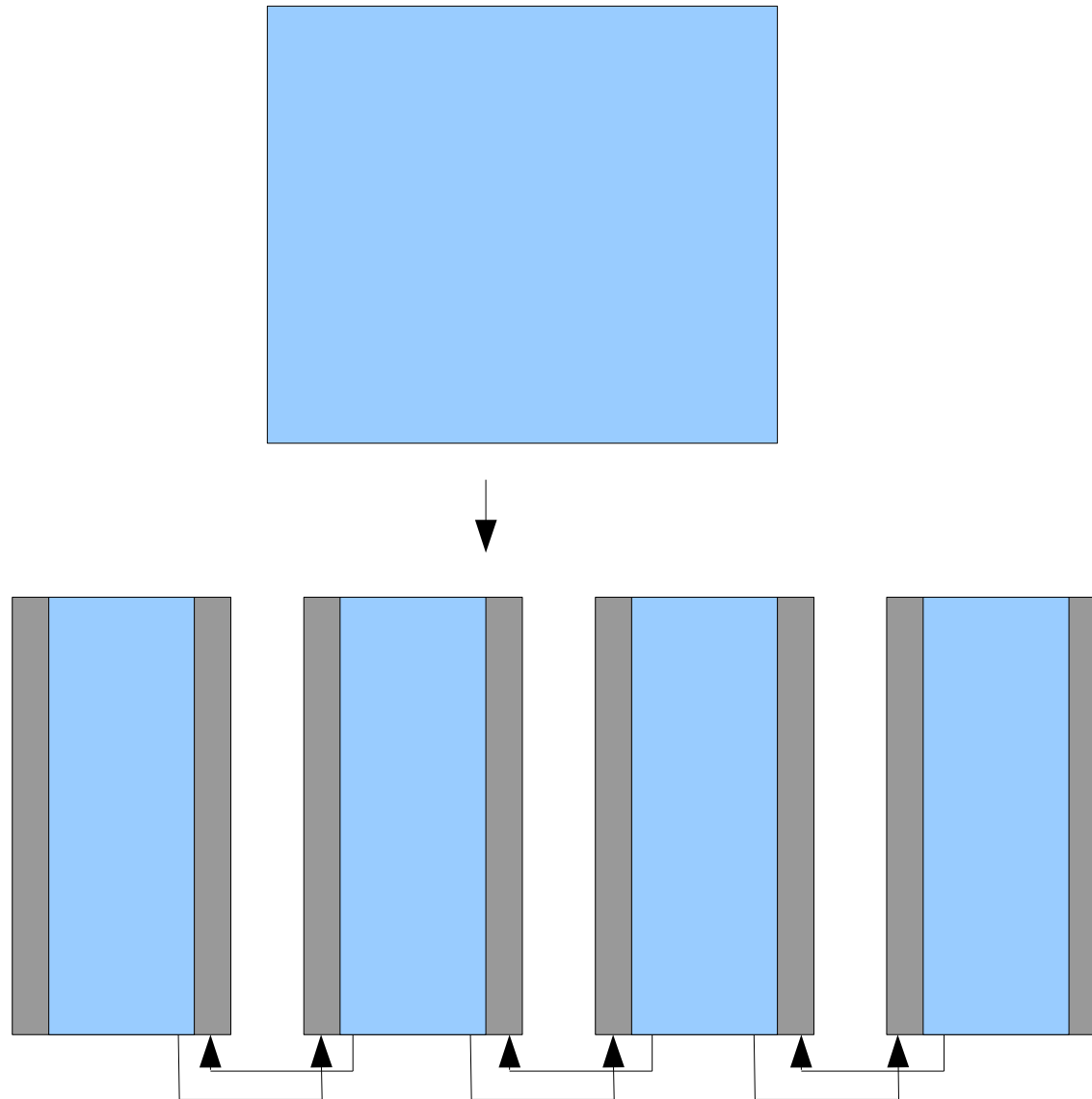
Двумерный случай: схема



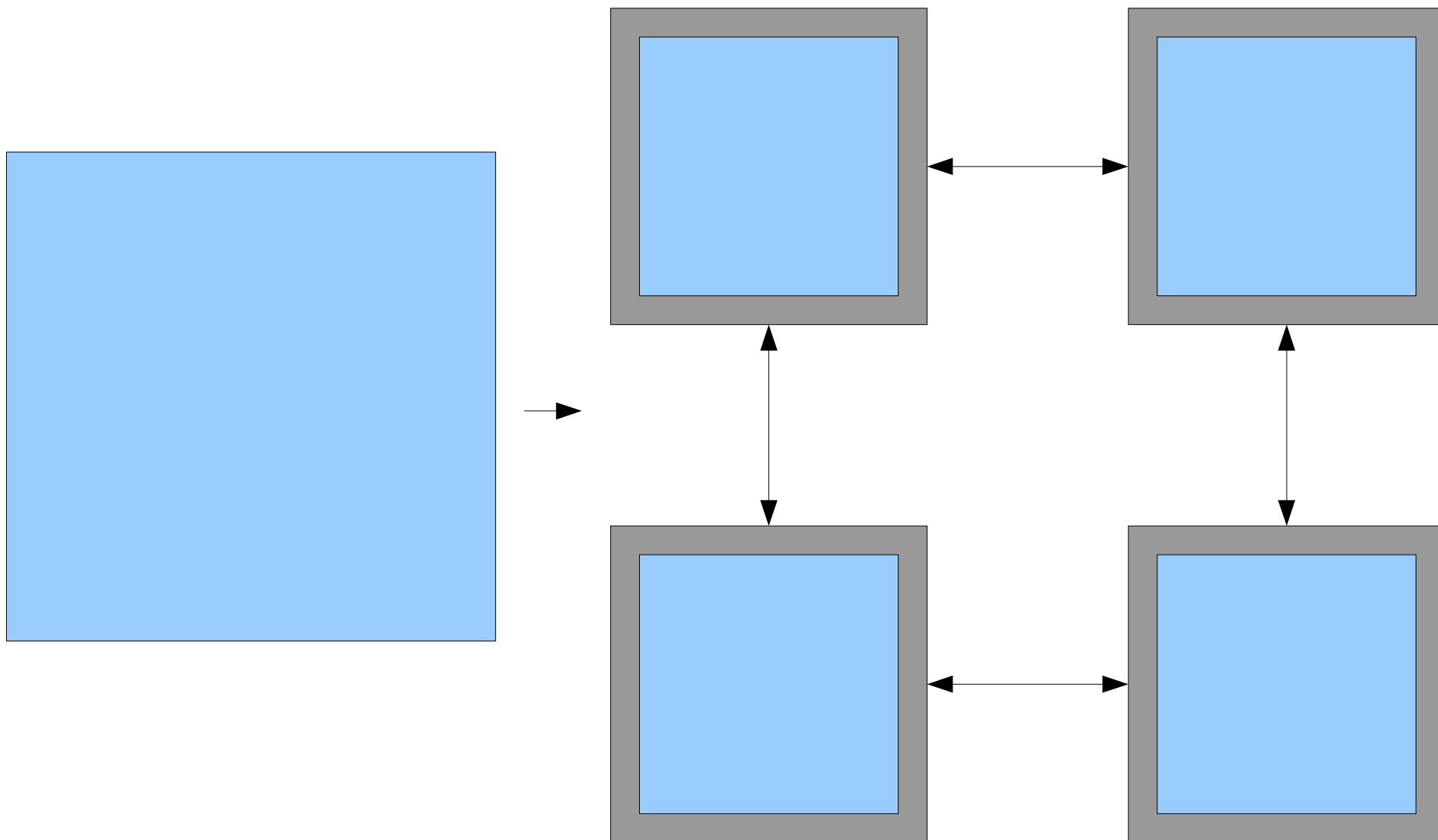
- шаблон разностной схемы в расчетах

$$u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^n + c \frac{\tau}{h^2} (u_{i-1,j}^n + u_{i,j-1}^n - 4u_{i,j}^n + u_{i+1,j}^n + u_{i,j+1}^n)$$

Одномерная декомпозиция



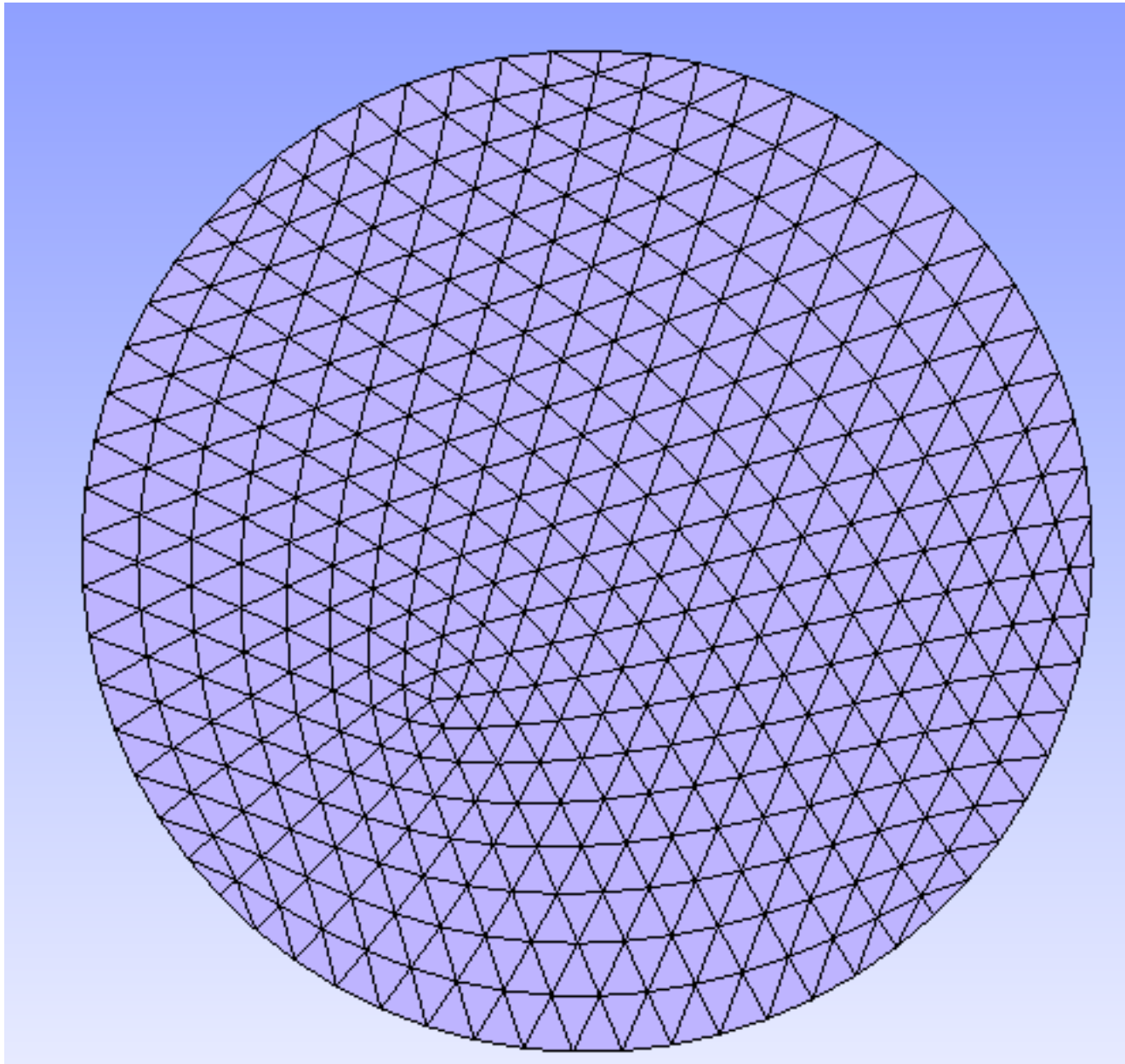
Двумерная декомпозиция



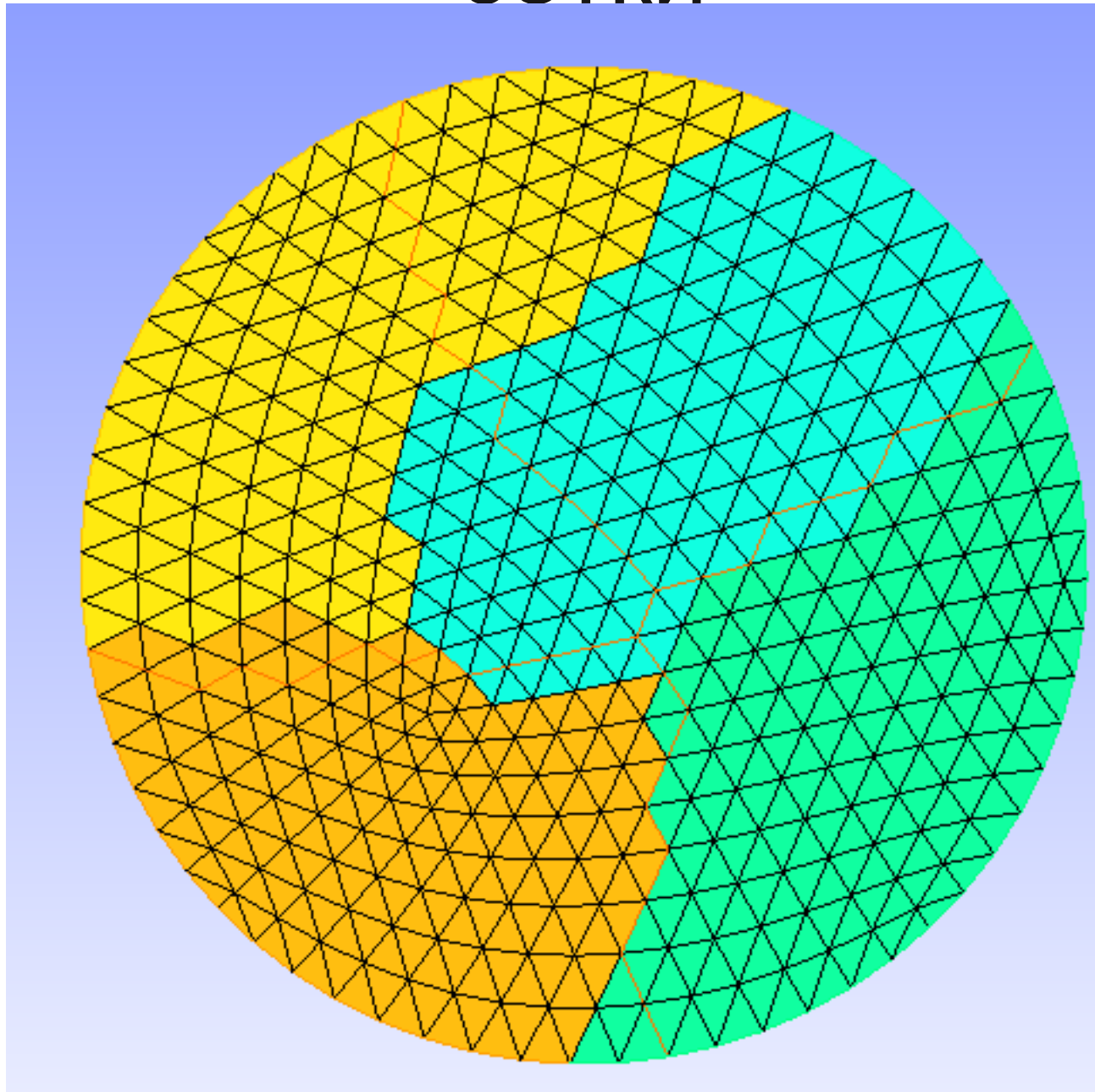
Неструктурные сетки

- Данные расположены в памяти не последовательно и возникают сложности с разбиением на части
- Для деления используются специальные алгоритмы разбиения графов
- Наиболее известные пакеты:
 - Metis <http://glaros.dtc.umn.edu/gkhome/views/metis>
 - Scotch <http://www.labri.fr/perso/pelegrin/scotch/>

Пример деления неструктурной сетки



Пример деления неструктурной сетки



Примеры

- Одномерная теплопроводность
- Двумерная теплопроводность с декомпозицией по одной из осей

Вопросы